Hybrid法による可算個の非拡大写像の強収束定理とその応用 (非線形解析学と凸解析学の研究)

吉川, 美佐子; 高橋, 渉

数理解析研究所講究録 1246 巻 2002 年 179-185

Hybrid 法による可算個の非拡大写像の強収束定理とその応用

Misako Kikkawa (吉川美佐子)、Wataru Takahashi (高橋　渉)
TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICAL
AND COMPUTING SCIENCES
(東京工業大学大学院情報理工学研究科)

1　はじめに

H を Hilbert 空間とし, $C \subset H$ を空でない閉凸集合としたとき, C 上の写像 T が非拡大であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$$

が成り立つことを言う. Halpern [3] は, T の不動点を求めるために次のような点列的近似法を導入した.

$$x_1 = x \in C, \quad x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n)Tx_n, \quad n \in N.$$

ただし $\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ である. 1992 年に, Wittmann[12] は Halpern の点列的近似法において, $\{\alpha_n\}$ に

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$$

の条件を加えると, $\{x_n\}$ が T の不動点に強収束することを証明した. また, Solodov と Svaiter[9] は Hilbert 空間上の極大単調作用素の零点を求めるために距離射影を用いた hybrid 法を導入したが, Nakajo と Takahashi[5] はこの hybrid 法を改良し, 従来とは異なる非拡大写像の強収束定理を証明した. 一方, Shimoji と Takahashi[7] は n 個の非拡大写像の共通不動点を求めるために n 個の写像の凸結合からなる W-mapping という写像を導入したが, この論文ではこの W-mapping と先の hybrid 法を用いて, 可算個の非拡大写像の共通不動点を求める強収束定理を証明している. ま

た, 最後にこの定理から導かれる制約可能性問題と関係のある収束定理についてもふれる.

2 準備

H を Hilbert 空間とし, その内積は $(\cdot,\cdot)$ で表すこととする. C を H の空でない閉凸部分集合とする. このとき, C 上の写像 T が非拡大であるとは, 任意の C の元 x, y に対して $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ が成り立つことを言う. 今, T の不動点の全体を $F(T)$ で表すと $F(T)$ は閉凸集合となる. Hilbert 空間 H は Opial 条件 [6] を満たすので, $x \neq y$ である $x, y \in H$ に対して $x_n \rightharpoonup x$ ならば

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|$$

が成り立つ. ただし, $\rightharpoonup$ は弱収束をあらわすこととする. ノルム $\|\cdot\|$ が弱下半連続性を持つことと, 任意の $\{x_n\} \subset H$ で $x_n \rightharpoonup x$ であるものに対して $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$ が成り立つことは同値である. H から C の上への距離射影を $P_C(\cdot)$ と書くとすると, 任意の C の元 x に対して $z = P_C(x)$ であることと, $(z - y, x - z) \geq 0$ が $y \in C$ に対して成り立つことは同値である.

C を H の凸集合, $T_1, T_2, \ldots$ を C 上の可算個の非拡大写像とする. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ は $i = 1, 2, \ldots$ に対して $0 \leq \alpha_i \leq 1$ となる実数とする. このとき, Shimoji と Takahashi [7] は $n \in N$ に対して次のような C 上の写像 W_n を定義した.

$$\begin{aligned}
U_{n,n+1} &= I, \\
U_{n,n} &= \alpha_n T_n U_{n,n+1} + (1 - \alpha_n) I, \\
U_{n,n-1} &= \alpha_{n-1} T_{n-1} U_{n,n} + (1 - \alpha_{n-1}) I, \\
&\vdots \\
U_{n,k} &= \alpha_k T_k U_{n,k+1} + (1 - \alpha_k) I, \\
U_{n,k-1} &= \alpha_{k-1} T_{k-1} U_{n,k} + (1 - \alpha_{k-1}) I, \\
&\vdots \\
U_{n,2} &= \alpha_2 T_2 U_{n,3} + (1 - \alpha_2) I, \\
W_n = U_{n,1} &= \alpha_1 T_1 U_{n,2} + (1 - \alpha_1) I.
\end{aligned}$$

このような写像 W_n は $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ から生成される *W-mapping* と呼ばれる. また, Shimoji と Takahashi [7] によって次

の２つの補助定理が証明されている.

補助定理 1 C を狭義凸 *Banach* 空間 E の空でない閉凸集合, $T_1, T_2, \ldots$ を C 上の非拡大写像で $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ は空でないものとする. また, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ は $i = 1, 2, \ldots$ に対して $0 < \alpha_i \leq b < 1$ を満たす実数とする. このとき, 任意の $x \in C$ と $k \in \mathbf{N}$ に対して $\lim_{n\to\infty} U_{n,k}x$ が存在する.

この補助定理１により, 任意の $x \in C$ と $k \in \mathbf{N}$ に対して, $U_{\infty,k}$ と C 上の写像 W を次のように定義することが出来る:

$$U_{\infty,k}x = \lim_{n\to\infty} U_{n,k}x,$$

$$Wx = \lim_{n\to\infty} W_n x = \lim_{n\to\infty} U_{n,1}x.$$

このように定義した W は $T_1, T_2, \ldots,$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ から生成される *W-mapping* と呼ばれる. 次の補助定理も主定理を証明するのに重要である.

補助定理 2 C を狭義凸 *Banach* 空間 E の空でない閉凸集合, $T_1, T_2, \ldots$ を C 上の非拡大写像で $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ は空でないものとする. また, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ は $i = 1, 2, \ldots$ に対して $0 < \alpha_i \leq b < 1$ を満たす実数とする. この時, $F(W) = \bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ である.

3 主定理

この節では, Hilbert 空間において可算個の非拡大写像の共通不動点を求める点列的近似法について議論する.

定理 1 C を *Hilbert* 空間 H の空でない閉凸集合とする. $T_1, T_2, \ldots$ を C 上の非拡大写像で $\bigcap_{i=1}^{\infty} F(T_i)$ は空でないとする. $0 < a \leq b < 1$ を満たす実数 a, b に対して, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ は $i = 1, 2, \ldots$ で $0 < a \leq \alpha_i \leq b < 1$ であるとする. $W_n (n = 1, 2, \ldots)$ を $T_n, T_{n-1}, \ldots, T_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ から生成される C 上の W-mappings とし, 任意の $x \in C$ に対して, C 上の写像 W を次のように定義する:

$$Wx = \lim_{n\to\infty} W_n x = \lim_{n\to\infty} U_{n,1}x.$$

また, $n = 1, 2, \ldots$ に対して点列 $\{x_n\}$ を

$$\begin{aligned}
x_1 &= x \in C, \\
y_n &= W_n x_n, \\
C_n &= \{z \in C; \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\}, \\
Q_n &= \{z \in C; (x_n - z, x_1 - x_n) \geq 0\}, \\
x_{n+1} &= P_{C_n \cap Q_n}(x_1), n \in N
\end{aligned}$$

で定義する．このとき，$F(W)=\bigcap_{i=1}^{\infty}F(T_i)$ であり，$\{x_n\}$ は $P_{F(W)}(x_1)$ に強収束する．

証明 1 $F(W)=\bigcap_{i=1}^{\infty}F(T_i)$ であることは補助定理 2 による．$n=1,2,\dots$ に対して、Q_n が閉凸集合であることと C_n が閉集合であることはあきらかなので C_n が凸集合であることを示す．$\|y_n-z\|\le\|x_n-z\|$ であることは $\|y_n-z\|^2+2(y_n-x_n,x_n-z)\le 0$ と同値である．今，$z_1,z_2\in C_n$，$\alpha\in(0,1)$ とすると

$$
\begin{aligned}
&2(y_n-x_n,x_n-(\alpha z_1+(1-\alpha)z_2))+\|y_n-x_n\|^2\\
&\quad=\alpha\{2(y_n-x_n,x_n-z_1)+\|y_n-x_n\|^2\}\\
&\qquad\quad+(1-\alpha)\{2(y_n-x_n,x_n-z_2)+\|y_n-x_n\|^2\}\\
&\quad\le 0
\end{aligned}
$$

であるから，$C_n\cap Q_n$ は $n=1,2,\dots$ で閉凸集合になる．次に, $C_n\subset F(W)$ を示す．$u\in F(W)$ とする．

$$
\begin{aligned}
\|y_n-u\| &= \|W_nx_n-u\|\\
&= \|W_nx_n-W_nu\|\\
&\le \|x_n-u\|
\end{aligned}
$$

となるので $n=1,2,\dots$ に対して $F(W)\subset C_n$ を得る．次に，$\{x_n\}$ が定義可能であることを示す．$n=1$ のとき，$F(W)\subset C_1$ であるのと $F(W)\subset C=Q_1$ であることより $F(W)\subset C_1\cap Q_1$ となる．$C_1\cap Q_1$ は閉凸集合であるから $x_2=P_{C_1\cap Q_1}(x_1)$ となる $x_2\in C_1\cap Q_1$ が存在する．したがって $z\in C_1\cap Q_1$ に対して $(x_2-z,x_1-x_2)\ge 0$ が成り立つ．また，$F(W)\subset C_1\cap Q_1$ であったので，$u\in F(W)$ に対しては $(x_2-u,x_1-x_2)\ge 0$ が成り立つので $F(W)\subset C_2$を得る．よって $F(W)\subset C_2\cap Q_2$ である．このようにしてあとは帰納的に $x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}(x_1)$ が定義出来る．$F(W)$ は C の空でない閉凸集合なので，$z_1=P_{F(W)}(x_1)$ となる $z_1\in F(W)$ が存在する．$x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}(x_1)$ であることから，任意の $z\in C_n\cap Q_n$ に対して

$$\|x_{n+1}-x_1\|\le\|z-x_1\|$$

を得る．したがって，$n=1,2,\dots$ に対して

$$\|x_{n+1}-x_1\|\le\|z_1-x_1\|$$

が成り立つ．よって $\{x_n\}$ は有界である．$x_{n+1}\in Q_n$ であることと，Q_n の定義から $x_n=P_{Q_n}(x_1)$ なので，$n=1,2,\dots$ に対して

$$\|x_1-x_n\|\le\|x_1-x_{n+1}\|$$

を得る．よって $\{\|x_n - x_1\|\}$ は H の有界非減少点列になるので $\|x_n - x_1\|$ の極限が存在する．一方，

$$
\begin{aligned}
&\|x_n - x_1\|^2 \\
&\quad = \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_n - x_{n+1}, x_{n+1} - x_1) + \|x_{n+1} - x_1\|^2 \\
&\quad = \|x_n - x_{n+1}\|^2 - 2\|x_n - x_{n+1}\|^2 \\
&\qquad\qquad -2(x_n - x_{n+1}, x_1 - x_n) + \|x_{n+1} - x_1\|^2 \\
&\quad \leq \|x_n - x_{n+1}\|^2 - 2\|x_n - x_{n+1}\|^2 + \|x_{n+1} - x_1\|^2
\end{aligned}
$$

であるから，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$
\|x_n - x_{n+1}\|^2 \leq \|x_{n+1} - x_1\|^2 - \|x_n - x_1\|^2
$$

を得る．したがって

$$
\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_{n+1}\| = 0
$$

となる．また $x_{n+1} \in C_n$ であることを使うと

$$
\begin{aligned}
\|y_n - x_n\| &\leq \|y_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\| \\
&\leq \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|
\end{aligned}
$$

を得る．よって，$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$ となる．今，$\{x_n\}$ は有界なので弱収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ が存在する． その弱収束先を w_0 とする．$w_0 \neq Ww_0$ と仮定すると，$Opial$ 条件と W の定義から

$$
\begin{aligned}
\liminf_{j\to\infty} \|x_{n_j} - w_0\| &< \liminf_{j\to\infty} \|x_{n_j} - Ww_0\| \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} (\|x_{n_j} - W_{n_j} x_{n_j}\| \\
&\qquad + \|W_{n_j} x_{n_j} - W_{n_j} w_0\| + \|W_{n_j} w_0 - Ww_0\|) \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} (\|x_{n_j} - y_{n_j}\| \\
&\qquad + \|x_{n_j} - w_0\| + \|W_{n_j} w_0 - Ww_0\|) \\
&= \liminf_{j\to\infty} \|x_{n_j} - w_0\|
\end{aligned}
$$

となるが，これは矛盾である．よって $w_0 \in F(W)$ が得られた．一方で，$z_1 = P_{F(W)}(x_1)$，$w_0 \in F(W)$ であることとノルムの弱下半連続性から

$$
\begin{aligned}
\|x_1 - z_1\| &\leq \|x_1 - w_0\| \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \|x_1 - x_{n_j}\| \\
&\leq \limsup_{j\to\infty} \|x_1 - x_{n_j}\| \\
&\leq \|x_1 - z_1\|
\end{aligned}
$$

を得る．よって

$$\lim_{j\to\infty}\|x_{n_j}-x_1\|=\|x_1-z_1\|=\|x_1-w_0\|$$

となり $z_1=w_0$ を得る，また，$x_{n_j}-x_1 \rightharpoonup w_0-x_1$ と上の式より

$$x_{n_j}-x_1\to w_0-x_1$$

を得る．したがって

$$x_n\to P_{F(W)}(x_1)$$

となる．

4 制約可能性問題

H を Hilbert 空間とし, $D_1, D_2, \ldots$ を $D_0=\bigcap_{i=1}^{\infty} D_I$ は空でない H の閉凸集合とする．このとき, H から D_i への距離射影 $P_i(i=1,2,\ldots)$ のみを用いて D_0 の元をもとめるという点列的近似法の問題は，$\{g_1, g_2, \ldots\}$ を H 上の実数値連続凸関数の可算個の族に対して

$$D_0=\{x\in H: g_i(x)\le 0, i=1,2,\ldots\}$$

となる D_0 の元を見つけるという制約可能性の問題と関係がある．

系 1 *D を Hilbert 空間 H の空でない閉凸集合とする．$D_1, D_2, \ldots$ を D 上の部分集合で $\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ は空でないとする．$0<a\le b<1$ を満たす実数 a, b に対して，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ は $i=1,2,\ldots$ で $0<a\le\alpha_i\le b<1$ であるとする．P_i を D から D_i の上への距離射影とする．$W_n(n=1,2,\ldots)$ を $P_n, P_{n-1}, \ldots, P_1$ と $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1$ から生成される D 上の W-mappings とし, 任意の $x\in D$ に対して，D 上の写像 W を次のように定義する:*

$$Wx=\lim_{n\to\infty}W_nx=\lim_{n\to\infty}U_{n,1}x.$$

このとき, $n=1,2,\ldots$ に対して

$$\begin{aligned}
x_1 &= x\in D,\\
y_n &= W_nx_n,\\
C_n &= \{z\in D; \|y_n-z\|\le\|x_n-z\|\},\\
Q_n &= \{z\in D; (x_n-z, x_1-x_n)\ge 0\},\\
x_{n+1} &= P_{C_n\cap Q_n}(x_1)
\end{aligned}$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(W)}(x_1)\in\bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ に強収束する．

参考文献

[1] S. Atsushiba and W. Takahashi, Strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive mappings and applications, *Indian J. Math.*, **41** (1999), 435–453.

[2] G. Crombez, Image recovery by convex combinations of projections, *J. Math. Anal. Appl.*, **155** (1991), 413–419.

[3] B. Halpern, Fixed points of nonexpanding maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 957-961

[4] S. Kitahara and W. Takahashi, Image recovery by convex combinations for sunny nonexpansive retractions, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **2** (1993), 333–342.

[5] K. Nakajo and W. Takahashi, Storong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups, preprint.

[6] Z. Opial, Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 591–597.

[7] K. Shimoji and W. Takahashi, Strong Convergence to Common Fixed Points of Infinite Nonexpancive mappings and Applications, *Taiwanese J. Math.* , **32** (2000), 1463–1471.

[8] M.V. Solodov and B.F. Svaiter, A hybrid projection-proximal point algorithm, *J.Convex Analysis*, **6** (1999), 59–70.

[9] M.V. Solodov and B.F. Svaiter, Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hillbert space, *Math.Programming Ser.A*, **87** (2000), 189–202.

[10] W. Takahashi and K. Shimoji, Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems, *Math. Comput. Modelling*, **32** (2000), 1463-1471.

[11] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Kindai-kagakusha, Tokyo, 1988. (Japanese)

[12] R. Wittmann, Approximation of fixed points of nonexpansive mappings, *Arch. Math.*, **58** (1992), 486–491.